TEMA 2: FUNDAMENTOS Y APLICACIONES DE LA TEORÍA DE GRAFOS. DIAGRAMAS EN ÁRBOL.

I.- FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE GRAFOS

I.1 EL CONCEPTO DE GRAFO

A.- Definición geométrica.

B.- Definición algebraica

C.-Matrices asociadas a un grafo.

I.2.- APLICACIONES ENTRE GRAFOS

I.3.-CAMINOS EN UN GRAFO: GRAFOS CONEXOS Y 2-CONEXOS.

I.4.- GRAFOS EULERIANOS

I.5.- GRAFOS HAMILTONIANOS

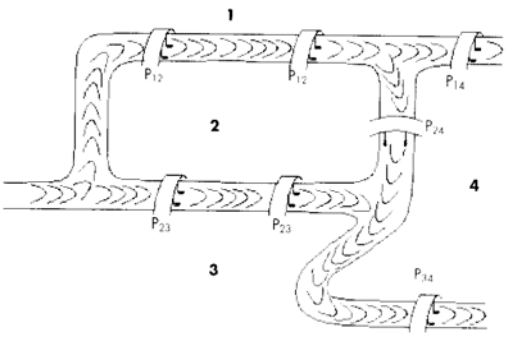
II.- DIAGRAMAS EN ÁRBOL

III.-APLICACIONES DE LA TEORÍA DE GRAFOS

TEMA 2: FUNDAMENTOS Y APLICACIONES DE LA TEORÍA DE GRAFOS. DIAGRAMAS EN ÁRBOL.

Existen cierto tipo de problemas que únicamente tienen que ver con un determinado número de puntos y ciertos trazos que los unen. La Teoría de Grafos es la rama de la Matemática discreta que se ocupa de tal tipo de problemas. La conectividad entre los elementos de un conjunto es pues el objetivo fundamental de la teoría de grafos.

La teoría de grafos es una de las áreas de la Matemática cuyo desarrollo ha estado siempre motivado por sus aplicaciones. Así, el primer artículo conocido sobre la misma fue escrito por Euler en 1736 para dar solución al célebre problema de "los puentes de Königsberg". La situación era la siguiente: ¿es posible encontrar una ruta en la ciudad que recorra los siete puentes, cruzando cada uno de ellos una sola vez y regresando al punto de partida?.



Euler demostró que no era posible.

A partir de tal fecha muchos matemáticos importantes han realizado contribuciones.

La teoría de grafos está estrechamente ligada a otros campos de la matemática como la topología (en realidad la teoría de grafos es topología monodimensional), la teoría de grupos, la teoría de conjuntos y la combinatoria.

Como veremos mas adelante la teoría de grafos tiene aplicaciones en multitud de disciplinas, no restringiéndose solamente a las matemáticas.

A continuación expondremos los conceptos fundamentales de la teoría y algunas aplicaciones de la misma.

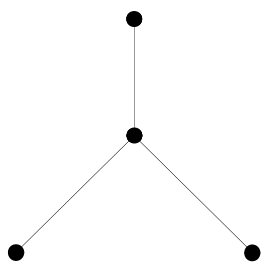
I.- FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE GRAFOS

I.1 EL CONCEPTO DE GRAFO

Los grafos pueden ser considerados formalmente como diagramas o dibujos (representación diagramática), o bien algebraicamente como un par de conjuntos y una aplicación entre esos conjuntos (representación algebraica). También podemos considerar una tercera representación: la representación matricial.

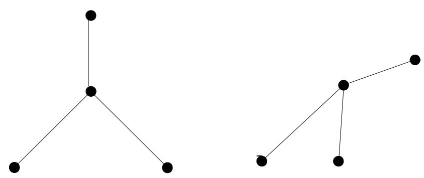
A.- Definición geométrica.

Geométricamente, un grafo G es un conjunto de puntos en el espacio, algunos de los cuales están unidos entre sí mediante lineas. Así por ejemplo la figura siguiente es un grafo.



Este grafo puede representar una multitud de situaciones posibles de la vida real. Podría simbolizar un mapa de carreteras, un circuito electrónico, una molécula química, etc.

Es importante comentar que un grafo contiene únicamente información topológica, es decir, información sobre las conectividades entre puntos, careciendo de información geométrica en el sentido euclideo (distancias, ángulos,..) Así, los dibujos siguientes representan el mismo grafo:



B.- Definición algebraica

Si queremos formalizar el concepto de grafo, debemos recurrir al álgebra. Así un grafo G es una tripleta (E(G),V(G),F), donde E(G), y V(G) son conjuntos arbitrarios (V(G) siempre es no vacío) y F es una aplicación que a cada elemento de

E(G) le hace corresponder un par no ordenado de elementos (repetidos o no) de V(G).

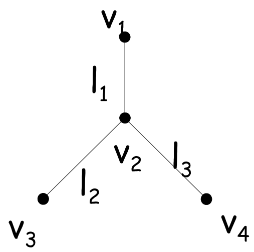
A los elementos de V(G) se les conoce como *vértices* o nodos, y los de E(G) como *lados*, lineas, arcos o aristas. A F se le llama aplicación de incidencia. En el caso de que F(l)=(i, j), diremos i y j son los extremos de l.

Si dos vértices i, j están unidos por una misma arista diremos que son adyacentes. Por otra parte diremos que dos lados son adyacentes si tienen algún vértice en común.

Diremos que $l \in E(G)$ es un lazo cuando empieza y acaba en el mismo vértice, es decir cuando sea de la forma F(l)=(i,i) para algún vértice i de G.

Para poder representar algebraicamente un grafo vamos a denotar a los lados por l_j y a los vértices por v_i.

Así, el grafo anterior



se puede expresar algebraicamente de la siguiente manera:

$G=(V(G),E(G),F)$

$V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$

$E(G)=\{l_1, l_2, l_3\}$

F definida por $F(l_1)=(v_1,v_2)$, $F(l_2)=(v_2,v_3)$, $F(l_3)=(v_2,v_4)$ o lo que es lo mismo $F(l_1)=(v_2,v_1)$, $F(l_2)=(v_3,v_2)$, $F(l_3)=(v_4,v_2)$ ya que como comentaba antes no importa el orden en que se tome el par.

El número de vértices del grafo G, |V(G)|, se denomina *orden* del grafo. El número de lados del grafo G, |E(G)|, se conoce como *tamaño* del grafo. Un grafo es finito si |V(G)| y |E(G)| son finitos.

En el caso en que E(G) sea vacío diremos que el grafo es *degenerado*.

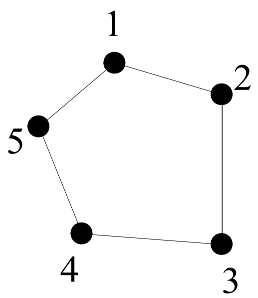
En el caso que la aplicación de incidencia de un grafo sea inyectiva, diremos que es *simple*.

Diremos que un grafo es *nulo* si tiene todos sus vértices aislados, entendiendo por vértice aislado aquel que no es extremo de ningún lado.

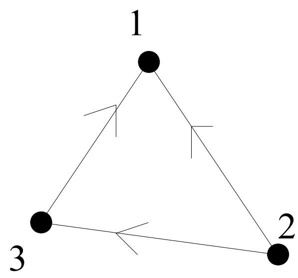
Diremos que un grafo es *completo* si posee un arco de extremos (u,v) para cada par de vértices u y v distintos.

Un grafo es *regular de grado n* si el grado de todos sus vértices es n, siendo el grado de un vértice el número de lados del grafo tales que uno de sus extremos es ese vértice.

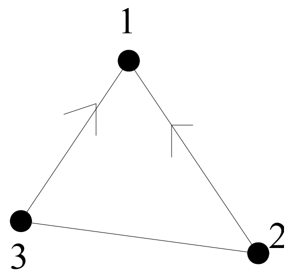
A veces sucede que cuando dos vértices v_i, v_j están relacionados, el orden es importante y por consiguiente (v_i, v_j) no significa lo mismo que el par (v_j,v_i). Cuando el orden de todos los pares relacionados sea importante hablaremos de Grafo Dirigido o Digrafo, y lo notaremos G_D para distinguirlo de un grafo G no dirigido. En este caso los lados los llamaremos *arcos* y los denotaremos mediante una flecha según el orden del par de vértices. Cuando es importante el orden sólo para una parte de vértices relacionados hablaremos de Grafo Mixto.



Grafo no dirigido



Grafo dirigido



Grafo mixto

C.-Matrices asociadas a un grafo.

Un grafo puede venir representado mediante una matriz. Las dos matrices más corrientes asociadas a un grafo son: matriz de adyacencia, y matriz de incidencia.

Sea G=(E,V,F) un grafo finito con V(G)={v_1,v_2,v_3,...v_n} y E(G)={l_1,.....,l_m}.

La **matriz de adyacencia** (M_A) es una matriz de orden nxn donde n es igual al número de vértices, cuyos elementos a_{ij} representan el número de lados de extremos (v_i, v_j).

M_A será simétrica si el grafo es no dirigido.

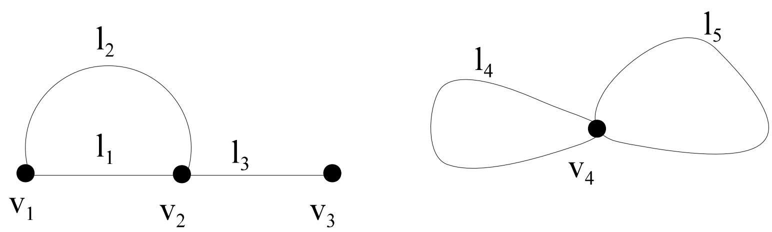
La **matriz de incidencia** M_I es una matriz de orden mxn donde m es el número de lados, y n el número de nodos, cuyos elementos se definen como sigue:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si } l_i \text{ es una lazo con extremo } v_j \\ 1 & \text{si } v_j \text{ es extremo de } l_i \text{ y } l_i \text{ no es un lazo} \\ 0 & \text{si } v_j \text{ no es extremo de } l_i \end{cases}$$

En el caso de un digrafo se distingue a_{ij}=+1, o a_{ij}=-1, según que el extremo sea final o inicial.

Cada fila de esta matriz corresponde a un lado del grafo que define.

Así por ejemplo si nos dan el grafo



$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La ventaja de la representación matricial de un grafo es que para matrices ha sido desarrollada toda una teoría, la cual nos permitirá la manipulación de las matrices para extraer cierta información característica del grafo.

I.2.- APLICACIONES ENTRE GRAFOS: SUBGRAFOS

Sean G_1=($E(G_1)$,$V(G_1)$,F_1) y G_2=($E(G_2)$,$V(G_2)$,F_2) dos grafos. Una ***aplicación de G_1 en G_2*** es una aplicación $\tilde{F}$ tal que:

$$\tilde{F}: G_1 \to G_2 \quad \text{con } \tilde{F} = (\tilde{F}_E, \tilde{F}_V) \quad \text{donde} \begin{cases} \tilde{F}_E : E(G_1) \to E(G_2) \\ \tilde{F}_V : V(G_1) \to V(G_2) \end{cases} \quad \text{verificando:}$$

Si $l \in E(G_1)$ con $F_1(l)=(v,w)$, entonces el lado $\tilde{F}_E(l)$ tiene por vértices asociados $F_2(\tilde{F}_E(l)) = (\tilde{F}_V(v), \tilde{F}_V(w))$.

Si $\tilde{F}$ es una aplicación de grafos diremos que es isomorfismo cuando $\tilde{F}_E$ y $\tilde{F}_V$ asociadas son biyectivas.

Dados dos grafos G_1 y G_2, diremos que G_2 ***es subgrafo*** de G_1 y lo denotaremos $G_2 \prec G_1$ si:

* $E(G_2) \overset{\tilde{i}_E}{\subseteq} E(G_1)$
* $V(G_1) \overset{\tilde{i}_V}{\subseteq} V(G_2)$
* $\tilde{i}: G_2 \to G_1$ es una aplicacion de grafos ($\tilde{i} = (\tilde{i}_E, \tilde{i}_V)$)

I.3.-CAMINOS EN UN GRAFO: GRAFOS CONEXOS Y 2-CONEXOS.

Los grafos son usados con frecuencia para representar redes de comunicación o transporte. En un grafo que represente una de las redes es importante conocer la existencia de caminos que recorran todas las aristas o todos los vértices. En este tema veremos todo esto. Para ellos comenzaré dando una serie de definiciones básicas.

Un *camino o ruta* en un grafo G es una secuencia (finita) en la que aparecen alternadamente vértices y lados de G:

$$v_0 \to l_1 \to v_1 \to l_2 \to v_2 \to \ldots\ldots \to v_{n-1} \to l_n \to v_n$$

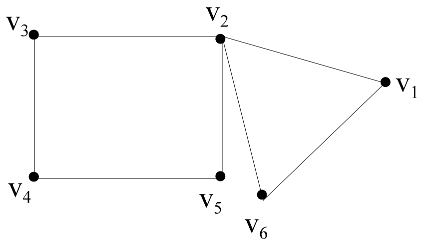
donde cada lado tiene por extremos los vértices inmediatamente precedente y siguiente en la secuencia.

<u>Nota</u>: En un grafo simple podemos representar el camino, sin pérdida de generalidad por la secuencia $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \ldots\ldots \to v_{n-1} \to v_n$ ya que cada dos vértices solo puede haber a lo sumo un lado que los una.

A los vértices v_0, v_n se les denomina extremos del camino (v_0: vértice inicial del camino, y v_n=vértice final) y se dice que el camino conecta v_0 y v_n.

La longitud de un camino es el número de aristas que contiene. Un camino tiene la propiedad de que dos lados consecutivos del mismo son o bien adyacentes o bien idénticos (si se retrocede).

El concepto de camino es demasiado general, así que vamos a imponer algunas restricciones que darán lugar a diferentes tipos de caminos. Lo haremos fijándonos en el grafo simple siguiente:



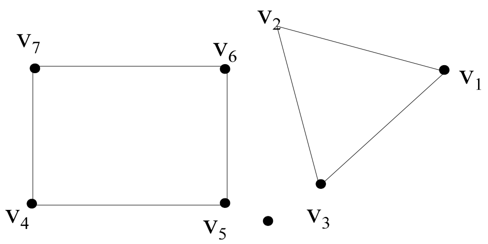
Un ***camino*** se dice que es ***cerrado*** si sus extremos coinciden, es decir, si empieza y termina en el mismo vértice (Ej: $v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_5 \to v_2$). En caso contrario, se dice que es un ***camino abierto*** (Ej: $v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_5$).

Un ***circuito*** es un camino cerrado en el cual todos los lados (aunque no necesariamente todos los vértices) son distintos (Ej: $v_6 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_5 \to v_2 \to v_1 \to v_6$).

Un ***ciclo*** es un camino cerrado en el cual todos los vértices (excepto el inicial y e l final) son distintos y, como consecuencia, todos los lados son también distintos (Ej: $v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_5 \to v_2$ y $v_1 \to v_2 \to v_6 \to v_1$).

Existen grafos donde para cada par de vértices v_i, v_j hay al menos un posible camino conectándolos y existen grafos en los no hay caminos conectando una determinada pareja de vértices. Esto llevó a los matemáticos a introducir el concepto de grafo conexo. Si todas las parejas posibles de vértices de un grafo G están conectados por al menos un camino, entonces se dice que el grafo es ***conexo***. Si no existe camino alguno entre alguna pareja de vértices v_i y v_j, se dice que es un grafo ***no conexo*** y que los vértices v_i y v_j pertenecen a diferentes componentes del grafo.

Así por ejemplo el grafo anterior es conexo y en cambio

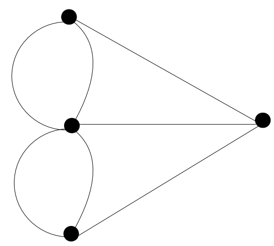


no es conexo (tiene dos componentes conexas).

Nota: De acuerdo a la teoría matricial, podemos calcular las potencias n-ésimas de la matriz de adyacencia asociada a un grafo. Estas potencias encierran una importantísima información topológica. Así, un elemento genérico de la potencia n-ésima, a_{ij}, es igual al número de diferentes caminos de longitud n conectando los vértices i y j.

I.4.- GRAFOS EULERIANOS

Como ya comentaba en la introducción Euler fue el que planteando el problema en la teoría de grafos "resolvió" el problema de los 7 puentes Könisberg.



El problema consistía en encontrar una ruta en la ciudad que recorriera los siete puentes, cruzando cada uno de ellos una sola vez, y regresando al punto de partida. Euler demostró que esto no era posible, con lo cual se planteó el problema: ¿En que grafos es posible encontrar una ruta que recorra todas las aristas una sola vez y vuelva al punto de partida? Más adelante veremos cual es la solución.

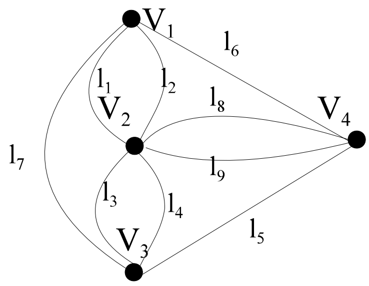
De esta forma se define lo que es un grafo euleriano, es decir:
Un grafo es ***euleriano*** si contiene un camino cerrado que pasa por todos los arcos del grafo una sola vez, y que empieza y acaba en el mismo punto. Un camino de este tipo recibe el nombre de camino euleriano cerrado.

Veamos la solución que aportó Euler:

Teorema

Sea G=(E(G),V(G),F) un grafo no degenerado.
G es euleriano y G no tiene vértices aislados si y solo si G es conexo y todos los vértices de G tienen grado par.

Así pues "no existe la ruta que deseamos en la ciudad de Könisberg". En la actualidad Könisberg es la ciudad lituana de Kaliningrado. Sobre ella se han construido dos puentes, no existentes en la época de Euler, para permitir una solución positiva al histórico problema.

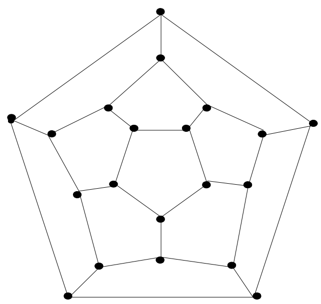


Una posible solución sería:

$v_1 \to l_1 \to v_2 \to l_3 \to v_3 \to l_5 \to v_4 \to l_6 \to v_1 \to l_7 \to v_3 \to l_4 \to v_2 \to l_9 \to v_4 \to l_8 \to v_2 \to l_2 \to v_1$

I.5.- GRAFOS HAMILTONIANOS

En 1856, el matemático Willian Hamilton presentó al mundo un puzzle. El juego estaba basado en un dodecaedro regular cuyos 20 vértices se marcaban cada uno con el nombre de una ciudad importante en aquella época. El juego consistía en salir de una determinada ciudad y encontrar una ruta que permitiera pasar por todas las demás ciudades una sola vez y regresar al punto de partida. El dodecaedro era tan incómodo de manipular que Hamilton desarrolló una versión del juego, en la que lo reemplazaba por un grafo con 20 vértices unidos mediante 30 aristas. El grafo resultante se conoce como grafo del dodecaedro.



Dado un determinado grafo, si existe algún camino en el mismo que verifique las condiciones anteriormente expuestas se conoce como ciclo hamiltoniano. A los grafos que admitan recorrer todos sus vértices mediante un ciclo hamiltoniano, se les denomina grafos hamiltonianos.

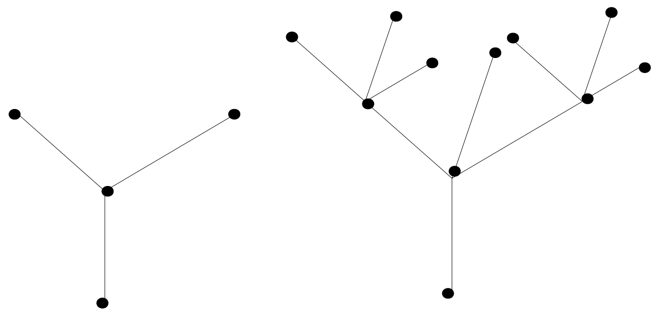
A pesar de la desesperada lucha de los matemáticos, no existe hoy en día un teorema alguno que nos permita determinar si un grafo es hamiltoniano o no. El método de ensayo y error es la única forma posible de tratar de encontrar una respuesta al problema.

II.- DIAGRAMAS EN ÁRBOL

Un tipo especial de grafos son los denominados árboles. Estudiémoslos en profundidad.

Un grafo G se dice que es un bosque si no posee ningún ciclo. Si además es conexo, se denomina árbol.

Obsérvese que los árboles y los bosques son por definición grafos simples.



Un arco es un itsmo o puente si al suprimirlo en G se obtiene un mayor número de componentes conexas que en G.

Veamos un resultado muy útil que nos caracterizará los árboles:

Teorema

Sea G un grafo con n vértices. Equivalen:

a) G es un árbol

b) G no posee ningún circuito y tiene n-1 arcos

c) G es conexo y tiene n-1 arcos.

d) G es conexo y cada arco es un puente

e) 2 vértices de G están conectados por una única trayectoria.

f) G no tiene ningún circuito y al añadir un nuevo arco se forma exactamente uno.

Estudiemos un nuevo concepto, el de árbol generador.

Sea A un árbol. Diremos que es un ***árbol generador*** de un grafo G si A es un subgrafo de G tal que su conjunto de vértices coincide con el de G.

Proposición

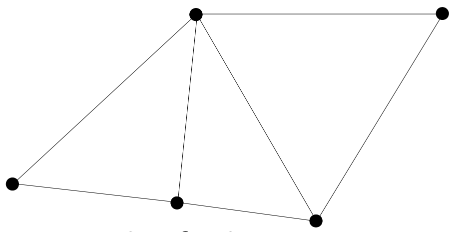
Si G es un grafo conexo entonces admite un árbol generador.

-D-

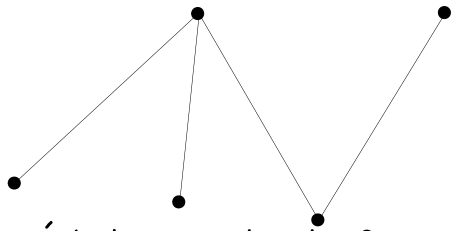
Si G es un árbol hemos terminado.

Si G no es un árbol, por el apartado d) de la caracterización vista posee al menos un arco que no es un puente. Suprimiéndolo, se obtiene un grafo conexo G'. Si G' es árbol, hemos acabado y si no repetimos el proceso. Como G es finito, repitiendo el proceso se llega a un grafo conexo A con los mismos vértices de G (cuyos arcos son arcos de G) en el que cada arco es un puente. Aplicando otra vez el apartado d) obtenemos que A es un árbol y además tiene los mismos vértices que G, por lo que es un árbol generador.

Ejemplo:



Grafo G



Árbol generador de G

III.-APLICACIONES DE LA TEORÍA DE GRAFOS

Desde sus orígenes, la Teoría de Grafos se utilizó para la resolución de juegos matemáticos, para el estudio de circuitos eléctricos y en diversas aplicaciones en una multitud de campos tan diferentes como la economía, física teórica, psicología, física nuclear, lingüística, sociología, zoología, tecnología, antropología, química, biología, etc. En la actualidad, la teoría de grafos sigue aplicándose dentro y fuera de las matemáticas.

La Teoría de Grafos tiene un poderoso apoyo en los problemas de transporte. Desde un punto de vista elemental, para que sea posible el transporte o la comunicación, son necesarios puntos concretos de emisión o recepción y rutas de comunicación. Estos dos elementos, puntos y rutas, se representan respectivamente por vértices y lados. La figura así obtenida es una red de transporte. Además los lados pueden estar orientados según si las rutas de desplazamiento necesitan definirse en un sentido obligatorio o puedan recorrerse en ambos sentidos.

A menudo interesa fijar la atención en los posibles trayectos posibles entre dos vértices distintos, de tal manera que se cumplan algunas condiciones útiles como, por ejemplo:

1.- Pasar por las aristas una sola vez.

El siguiente problema responde a esta idea: Un repartidor de propaganda tiene que desplazarse por una zona de ciudad depositando octavillas en los buzones. El plano de esta parte de ciudad es un grafo considerando los cruces como vértices y las calles como aristas. Al repartidor le interesa un trayecto de forma que vuelva al punto de salida después de haber pasado por todas las calles una sola vez.

Por tanto el problema se reduce a encontrar un camino euleriano cerrado en el grafo que consideramos. La forma de conseguirlo es aplicar el teorema de Euler al caso particular de cada plano de ciudad. Así el problema tendrá solución cuando el grafo sea conexo y todos los vértices tengan grado par.

2.- Pasar por todos los vértices del grafo.

El problema siguiente responde a este tipo:
Un camión repartidor de bebidas tiene que suministrar mercancía a un almacén distribuidor situados en cada ciudad. Su problema principal es encontrar el trayecto que una todas las ciudades pasando una sola vez por cada una de ellas. Ahora el objetivo no es pasar por todas las carreteras, sino pasar una sola vez por los puntos de reparto de manera que al final se llegue el punto de partida.

Este problema consiste en saber si este grafo contiene un ciclo hamiltoniano.

Cuando se presentan problemas en los que cada arista viene caracterizada por su distancia o por su capacidad para trasladar objetos por ella, la riqueza de situaciones se multiplica. Entramos de lleno en los ***problemas de optimización***, de los que algunos ejemplos menciono a continuación:

-Obtener una ruta entre dos vértices por el camino más corto.

- Obtener una ruta entre dos vértices de coste mínimo.

- Transportar un conjunto de objetos entre dos vértices de forma que se aproveche al máximo la capacidad de cada ruta.

Ejemplos de este tipo de situaciones son:

* El caso de un comerciante que necesita recorrer un grupo de ciudades alcanzando

finalmente la ciudad de partida después de recorrer la menor distancia.

* El caso de un autobús escolar que tiene que recoger a niños en un nº determinado de paradas situadas en distintas calles de una red urbana. El objetivo es encontrar una ruta con la menor longitud posible.

Ambos problemas consisten en ver si los grafos que representan los planos admiten un circuito hamiltoniano de longitud mínima.

Otro problema característico es el del *conector mínimo* y consiste en:

Se desea construir una red de ferrocarriles que conecte n ciudades dadas, de forma que un pasajero pueda viajar desde cualquiera de ellas a cualquier otra. Si suponemos que por razones económicas la cantidad de vía a utilizar debe ser mínima, el grafo formado por las n ciudades como vértices y las vías como lados, debe ser un árbol.

El problema consiste en encontrar un algoritmo eficiente que permita decidir cual de los n^{n-2} (fue Cayley el que lo demostró) posibles árboles que conectan estas ciudades usa la menor cantidad de vías, suponiendo que la distancia entre las ciudades es conocida.

Un grafo ponderado es un grafo en el que se han asignado a cada arista un número, llamado coste o peso. El peso de cada arista puede indicar la distancia, el tiempo empleado en recorrerla, coste económico, etc.

La solución a nuestro problema viene dada por el llamado *algoritmo de Krustal*. Por tanto dicho algoritmo es un método para encontrar un árbol generador de peso mínimo en un grafo conexo ponderado de n- vértices. Veamos cuales son los pasos de este algoritmo.

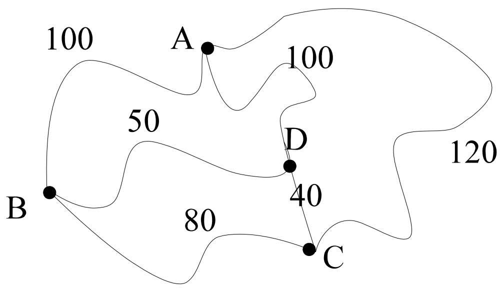
1º Ordenamos las aristas en orden creciente de peso.

2º Elegimos una arista a_1 de peso mínimo.

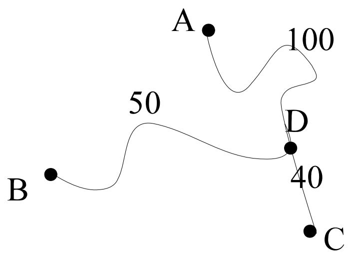
3º Formamos una sucesión de aristas $a_2,\ldots,a_{n-1}$ eligiendo en cada iteración la de menor peso posible (no elegida anteriormente) de forma que no forme un circuito con las seleccionadas previamente.

4º Terminamos cuando tengamos n-1 aristas así elegidas. El árbol generador requerido es el grafo A de aristas $a_1,\ldots,a_{n-1}$ y los vértices de G

Pongamos el ejemplo de la construcción de una red ferroviaria. Supongo que tengo 4 ciudades A,B,C,D y las distancias entre ellas son:



Utilizando el algoritmo de Krustal para encontrar el árbol que utiliza la menor cantidad de vía obtenemos:



Una importante aplicación de los grafos, y que nada tiene que ver con lo visto hasta ahora es su utilización como modelos estructurales de la ciencia. En particular, es muy frecuente su utilidad en la química. Y es que es difícil encontrar algo en la ciencia que se asemeje tanto a un grafo como la fórmula estructural de un compuesto químico. Los vértices representan a los átomos de la molécula y los lados a los enlaces químicos que conectan ciertas parejas de átomos.